

На правах рукописи



Адрианов Александр Леонидович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ
ИДЕАЛЬНОГО И ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА
НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНО–АНАЛИТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2013 г.

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева», г. Красноярск.

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий отделом
дифференциальных уравнений механики
ИВМ СО РАН, г. Красноярск,
Андреев Виктор Константинович

Официальные оппоненты: **Баутин Сергей Петрович**,
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой прикладной
математики УрГУПС, г. Екатеринбург

Ковеня Виктор Михайлович,
доктор физико-математических наук,
профессор, г.н.с. ИВТ СО РАН,
г. Новосибирск

Матвеев Сергей Константинович,
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
гидроаэромеханики СПбГУ,
г. Санкт-Петербург

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт прикладной
математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва

Защита состоится 20 ноября 2013 г. в 12 часов на заседании диссертационного совета ДМ 003.046.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика М.А. Лаврентьева, 6 (dsovet@ict.nsc.ru)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИВТ СО РАН.

Автореферат разослан 9 октября 2013 года

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета

Ученый секретарь
диссертационного совета,

к.ф.-м.н., доцент



А.С. Лебедев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математическое моделирование *ударных течений* идеального, а также вязкого теплопроводного газа при больших числах Рейнольдса, на основе новых подходов, объединяющих положительные свойства численных и аналитических методов, представляет собой актуальное научное направление. Правильно сконструированный *численно-аналитический метод-симбиоз* может обладать значительно большей разрешающей способностью и (или) эффективностью при расчете газодинамических течений, содержащих скачки уплотнения (СУ), *сдвиговые слои*, а также множественные их взаимодействия, чем отдельные представители классов численных и аналитических методов. Методы, построенные на основе указанного симбиоза, способны дать новые сведения о деталях внутреннего устройства сложных двумерных, в частности, стационарных сверхзвуковых *ударных газодинамических течений*, выявить как раздельное, так и совместное влияние таких факторов, как *неравномерность* невозмущенного течения перед СУ, *краевой эффект* (КЭ) за ним, формируемый догоняющими его возмущениями, *вязкость-теплопроводность* (ВТ), на исследуемый физический процесс.

В настоящей работе под *численно- или разностно-аналитическим методом* понимается *метод-симбиоз*, сконструированный на основе сложного объединения аппарата *разностных схем* (РС) и аналитического аппарата, применяемого локально (*дискретно*) на особенностях. При этом СУ представляются либо *выделенными*, либо *схематизированными* гладкой криволинейной поверхностью *сильного газодинамического разрыва* в зависимости от используемой математической модели течения сжимаемого газа: невязкой (идеальной) или вязкой с теплопроводностью при больших числах Рейнольдса соответственно. Основным мотивом для *гладкого представления* СУ с адекватным этому локальным применением аналитического аппарата является естественный (бесконечный в отсутствие других возмущений и, тем более, при учете фактора ВТ) порядок гладкости решения в касательном к скачку направлении, которым следует воспользоваться. Тогда, при выполнимости на *схематизированном* криволинейном СУ в неравномерном потоке идеального или вязкого теплопроводного газа *обычных* (типа *Рэнкина-Гюгонно*) либо *обобщенных* (с учетом фактора ВТ) *соотношений 0-го порядка*, требуется еще и выполнимость соответствующих уже «продолженных

соотношений» – соотношений 1-го порядка (иначе, дифференциальных соотношений на СУ). С привлечением математического языка аппарата *сплайнов* (сплайн-функций), то же может быть сказано иначе: локально используемый аналитический аппарат позволяет в *гладком представлении* фронта СУ перейти к сплайну более высокого порядка. Важно, что при таком *гладком представлении* СУ уже отсутствует необходимость в поточечной постановке на нем соотношений 0-го порядка: в любой его расчетной точке они будут выполняться уже автоматически (!), а поэтому, могут быть задействованы в ходе расчета лишь с целью дополнительного поточечного контроля точности вычислений. Привлеченный в связи с гладкостью процесса дополнительный аналитический аппарат *дифференциальных соотношений* на СУ позволяет проанализировать влияние (совместное, в частности) основных физических факторов на эволюцию фронта самого скачка и, при необходимости управлять его поведением. Этими факторами являются: градиенты газодинамических величин в невозмущенном потоке перед СУ, КЭ за ним, а также фактор ВТ, при асимптотическом учете его в данных соотношениях. Заметим, что основываясь только на *обычных* (типа *Рэнкина-Гюгонно*) соотношениях 0-го порядка и, соответственно, на аппарате *ударных поляр*, подобный анализ и управление поведением фронта СУ невозможны.

Необходимая в рамках *дискретно-аналитического подхода схематизация разрывов* (или газодинамических образований, которые можно считать таковыми при больших числах Рейнольдса) позволяет избежать таких отрицательных явлений, как *дистракция* (размазывание) *разрыва* и локальная (на нем) потеря аппроксимативных свойств численного решения, *дефект насыщения* вычислительного алгоритма, присущих *методам сквозного счета*. Кроме того, численные методы решения систем *уравнений Эйлера* (УЭ) и *Навье-Стокса вязкого теплопроводного газа* (УНСВТ) все еще требуют значительных вычислительных ресурсов, с чем, несмотря на появление СуперЭВМ с петафлопной производительностью, нельзя не считаться. В отличие от этого, как показано в настоящей работе, *схематизация* проникающего в сдвиговый слой одиночного СУ при некоторых дополнительных допущениях позволяет свести (редуцировать) краевую постановку задачи для указанных систем уравнений к задаче *Коши* для системы ОДУ. Такая редукция в плане постановки вязкой задачи исключительно важна для практики, поскольку позволяет в процессе мате-

матического моделирования в рамках единого вычислительного алгоритма проходить «насквозь» от *газодинамической* до *диффузионной* стадии эволюции СУ в слое. Этим достигается значительная экономия вычислительного ресурса: счет на ПЭВМ вместо многих часов (УНСВТ) занимает минуты или даже секунды. В такой постановке задачи сохраняется естественный порядок гладкости решения в касательном к СУ направлении, что и явилось основным мотивом для применения *дискретно-аналитического подхода*.

Отмеченные преимущества *численно-аналитических методов* и соответствующих им подходов к решению задач сверхзвуковой аэрогазодинамики имеют немаловажное практическое значение: организация новых и оптимизация существующих рабочих физических процессов в энергетических установках, их выходных характеристик и, как следствие, сокращения сроков разработки и проектирования изделий аэрокосмической промышленности.

В плане создания логически сложных вычислительных алгоритмов с локальным (на особенностях) применением аналитического аппарата и соответствующих методик расчета *ударных газодинамических течений*, следует выделить пионерские работы именно отечественных ученых. Своими исследованиями они внесли крупный вклад в данное научное направление, обеспечив приоритет советской, а затем и российской науки.

Цель диссертационной работы

– разработка *дискретно-аналитического подхода* (включая построение и анализ используемых в его рамках вычислительных методов и их алгоритмов) и математическое моделирование на его основе двумерных стационарных *ударных течений* идеального и вязкого теплопроводного газа. Данный подход предполагает обоснованную *схематизацию скачков уплотнения* гладкой криволинейной поверхностью *сильного газодинамического разрыва* в вязком теплопроводном газе при больших числах Рейнольдса и допускает выделение множества газодинамических особенностей (*разрывов*) различного типа в случае идеального газа.

Объектом исследования являются *ударные течения* невязкого и вязкого теплопроводного газа при больших числах Рейнольдса, описываемые различными моделями.

Предмет исследования – математические модели разной сложности, включая асимптотические, на основе тех или иных законов сохранения, описывающие класс ударных течений, численно-аналитические методы, вычислительные алгоритмы и методики расчета газодинамических течений.

Методами исследования являются: методы математического и асимптотического анализа, методы вычислительной и прикладной математики, метод дифференциальных связей, а также теоретические основы и конструирование вычислительных алгоритмов решения задач математической физики.

Основные научные результаты и их новизна. В работе получены следующие новые научные результаты:

1. Впервые получены *обобщенные дифференциальные соотношения* (ОДСС) на схематизированном криволинейном скачке уплотнения (СУ) в двумерном (плоском или осесимметричном) неравномерном потоке вязкого теплопроводного совершенного газа при больших числах Рейнольдса. *Вязкие слагаемые* в ОДСС учтены асимптотически в приближении сдвигового слоя. Окончательно ОДСС представлены в матричной форме с малым параметром $\varepsilon^2 = (Re_\infty)^{-1}$ при старших производных и нелинейных членах. В процессе получения ОДСС и следующих из них уравнений применяются средства компьютерной алгебры.

2. Найден универсальный способ замыкания ОДСС с помощью *расширенной дифференциальной связи*, допускающий учет реального *краевого эффекта* (КЭ) за СУ, а также замену его *модельным* КЭ (в частности, *исключающим условием*), например, когда реальный КЭ неизвестен или необходимо оценить степень влияния того или иного КЭ на эволюцию СУ с учетом фактора *вязкости-теплопроводности* (ВТ). Выявлены допустимые границы (значений коэффициентов) в задании КЭ за СУ с помощью *изобарической дифференциальной связи*.

3. Разработаны, включая алгоритмизацию и программирование, оригинальные эффективные итерационные (на шаге) методы численного интегрирования нелинейной системы ОДУ, получаемой из ОДСС после их замыкания, не предполагающие нормализацию уравнений.

4. Предложена последовательная *двухэтапная схема* математического моделирования *ударных течений* вязкого теплопроводного газа при больших числах Рейнольдса на основе асимптотических ОДСС. На *первом (аналитическом) этапе* одновременно под конкретную задачу (класс задач) средствами компьютерной алгебры генерируются ОДСС и следующая из них система дифференциально-разностных *рабочих уравнений* (РУ) (система ОДУ), фиксирующая: конкретный вид *дифференциальной связи*, учет (неучет) отдельных вторичных вязких членов, порядки асимптотических разложений и разностных аппроксимаций старших производных за СУ, газодинамические и другие константы, и т.п. На *втором (расчетном) этапе* на основе сгенерированных РУ проводятся все необходимые расчеты.

5. Предложена эффективная *стационарная дискретно-аналитическая модель* взаимодействия СУ со сдвиговым слоем, обобщающая «невязкую» *вихревую модель*, в которой число Рейнольдса фигурирует лишь как внешний параметр, определяющий поперечные масштаб и компоненту скорости невозмущенного сдвигового течения. В новой модели на основе асимптотических ОДСС, наряду с таким вхождением, фактор ВТ присутствует явно в интегрируемых дифференциальных уравнениях, и поэтому частично, а в ряде случаев значительно, определяет возмущенное сверхзвуковое течение. Предлагаемая модель лишена таких негативных механизмов, как *схемная вязкость* и *дистракция СУ*, присущих разностным методам.

6. Получено аналитическое (в расширенном смысле) решение стационарной задачи о проникновении СУ в сдвиговый слой. С учетом допущений исходная начально-краевая задача для *уравнений Навье-Стокса вязкого теплопроводного газа* (УНСВТ) сведена к задаче *Коши* для сложной нелинейной системы ОДУ (РУ), выполняющихся вдоль СУ.

7. Проведено математическое моделирование проникновения СУ в сдвиговый слой с применением вязких и невязких моделей разной сложности. Показано, что неучет фактора ВТ в явном виде в *дифференциальных соотношениях* на СУ (в ОДСС) при расчете возмущенного течения в слое может привести к неверному конечному результату. В частности, показана неадекватность *вихревой модели взаимодействия* на основе полностью невязких *дифференциальных соотношений* на СУ в случае высокоградиентного, имеющего вязкую предысторию, течения перед ним. Выявлено как раздельное, так и

совместное влияние таких физических факторов, как *неравномерность* невозмущенного течения перед СУ, *краевой эффект* за ним, *вязкость-теплопроводность*, на исследуемый *ударный газодинамический процесс*.

8. Разработан высокоточный метод расчета сложных двумерных (плоских и осесимметричных) стационарных сверхзвуковых газодинамических течений, содержащих множество дискретных особенностей (*разрывов*). Оригинальная конструкция несогласованной с *выделяемыми поверхностями* (ВП) *разрывов* разностной сетки делает *метод выделения разрывов* (МВР) более мобильным, позволяя вести выделение сотен взаимодействующих между собой и с границами расчетной области *разрывов* с автоматическим переходом на *сквозной счёт* отдельных из них, в зависимости от изначально выбранных критериев качества (разрешающей способности МВР). В процессе счета допускается появление новых и исчезновение вырожденных, утративших свою силу, особенностей. ВП могут являться фактические *разрывы* (*сильные* и *слабые*) всех существующих типов и направлений, а также *фиктивные разрывы* (характеристики) соответствующих семейств. Предложен оригинальный эффективный фильтр ВП на основе решения локальной «задачи о взаимодействии двух произвольных плоских однородных сверхзвуковых потоков», позволяющий ограничивать разрешающую способность (детализацию) вычислительного алгоритма МВР при образовании «сгустков» из ВП, замедляющих расчет.

9. Проведено масштабное вычислительное моделирование плоских и осесимметричных стационарных струйных и канальных газодинамических течений с множеством *разрывов*. Показаны высокая разрешающая способность, быстрая сходимость и эффективность данного МВР, а также качественное и количественное отличия численных решений, полученных на одних и тех же расчетных сетках, данным МВР и *методом сквозного счета*.

10. Разработаны объемные комплексы вычислительных программ, реализующие на практике *дискретно-аналитический подход*.

Достоверность полученных результатов подтверждается:

- сопоставлением с частными теоретическими и расчетными результатами, полученными другими авторами (по другим методикам);

- внутренним (в рамках вычислительного алгоритма) пошаговым и интегральным контролем точности выполнения основных и дополнительных законов сохранения;
- оценками погрешностей от варьирования порядками асимптотических разложений и разностных аппроксимаций;
- практическим исследованием сходимости получаемых численных решений к точным решениям или решениям, получаемым с помощью альтернативных методик расчета.

Теоретическая значимость результатов состоит:

- в получении (впервые) асимптотических *обобщенных* (с учетом фактора *вязкости-теплопроводности*) *дифференциальных законов сохранения* на *схематизированном* криволинейном скачке уплотнения и следующей из них нелинейной системы ОДУ со специфическими свойствами; в разработке оригинальных эффективных методов численного интегрирования данной системы;
- в новой математической постановке стационарной задачи о проникновении скачка уплотнения в сдвиговой слой вязкого теплопроводного газа при больших числах Рейнольдса и получении соответствующего аналитического (в расширенном смысле) решения данной задачи при произвольном *краевом эффекте*; в теоретическом анализе и выявлении допустимых границ в его задании;
- в теоретическом доказательстве *исключающего (краевой эффект) условия*;
- в теоретическом анализе конструкций разработанных алгоритмов, а также выводов о возможности их обобщения на случаи более сложных моделей газовых сред и соответствующих систем уравнений (*законов сохранения*).

Практическая значимость результатов

- Разработанные в рамках *дискретно-аналитического подхода* математические модели *ударных течений*, *численно-аналитические методы* и *вычислительные алгоритмы* реализованы в виде программных комплексов, предназначенных:
 - для проведения сложных *машинных* аналитических выкладок с целью получения используемых далее (в *расчетных* программных модулях) символьных продуктов: *обобщенных соотношений* на скачке уплотнения *0-го* и *1-го* порядков, а также следующих из них, после их замыкания и аппроксимации старших производных за скач-

ком, дифференциально-разностных *рабочих уравнений*, якобианов к ним и т.п.; (п/среда «REDUCE (LISP)»);

– для проведения самих расчетов (моделирования на основе сгенерированных *рабочих уравнений* (системы ОДУ)) по проникновению скачка в сдвиговый слой вязкого теплопроводного газа при больших числах Рейнольдса; (п/среда «Compaq Visual Fortran + библиотека IMSL»);

– для проведения расчетов сложных двумерных (плоских и осесимметричных) стационарных сверхзвуковых невязких газодинамических течений, содержащих множество дискретных особенностей (*разрывов*);

– для обработки результатов расчетов и отображения сложной графической информации о геометрии *выделяемых поверхностей разрывов* в расчетной области; (п/среды «Fortran + специальные библиотеки», «MathCAD»).

■ С практической точки зрения важно, что разработанная *дискретно-аналитическая модель* взаимодействия скачка со сдвиговым слоем позволяет в рамках единого вычислительного алгоритма проходить насквозь от *газодинамической* до *диффузионной* стадии эволюции скачка в слое. Этим достигается значительная экономия вычислительного ресурса: счет на ПЭВМ вместо многих часов (*уравнения Навье-Стокса вязкого теплопроводного газа*) занимает минуты или даже секунды, что позволяет проводить эффективные расчеты, не прибегая к использованию дорогостоящих высокопроизводительных ЭВМ.

■ Сделанные в диссертации выводы и разработанные вычислительные алгоритмы, могут оказаться полезными при конструировании и оптимизации технических устройств, энергетических установок, использующих *ударные газодинамические процессы*.

■ Полученные результаты могут быть использованы при конструировании нестационарных аналогов разработанных вычислительных методик и алгоритмов, а также при распространении *дискретно-аналитического подхода* на турбулентные и многофазные реагирующие течения, где его ожидаемая эффективность должна быть еще выше.

Положения, выносимые на защиту:

1. Получение *обобщенных дифференциальных соотношений* (ОДСС) на *схематизированном криволинейном скачке уплотнения*

(СУ) в двумерном неравномерном потоке вязкого теплопроводного совершенного газа при больших числах Рейнольдса.

2. Универсальный способ замыкания ОДСС с помощью *расширенной дифференциальной связи*, допускающий учет всевозможных *краевых эффектов* за СУ, включая реальные и *модельные*.

3. Эффективные итерационные (на шаге) методы численного интегрирования нелинейной системы ОДУ, получаемой из ОДСС после их замыкания, не предполагающие нормализацию уравнений.

4. Двухэтапная, включающая *аналитический* и *расчетный* этапы, *схема математического моделирования* двумерных стационарных *ударных течений* вязкого теплопроводного газа при больших числах Рейнольдса на основе асимптотических ОДСС.

5. Стационарная *дискретно-аналитическая модель* взаимодействия СУ со сдвиговым слоем и получаемое с ее помощью аналитическое (в расширенном смысле) решение задачи. Результаты математического моделирования на основе настоящей и других моделей разной сложности, сопоставление и сравнительный анализ полученных результатов. Выводы по влиянию основных физических факторов на исследуемый *ударный газодинамический процесс*, а также о необходимости явного учета фактора *вязкости-теплопроводности* в решаемой задаче.

6. Высокоточный метод численного моделирования сложных двумерных стационарных сверхзвуковых газодинамических течений с выделением множества дискретных особенностей (*разрывов*) на несогласованной сетке. Результаты математического моделирования двумерных газодинамических течений, содержащих большое количество взаимодействующих *разрывов* различного типа.

Представление результатов. Основные результаты по теме диссертации докладывались и обсуждались на: V (Казань, 1984) и VII (Кемерово, 1988) Всесоюзных семинарах «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», XV (Абрау-Дюрсо, 2004) Всероссийской конференции памяти К.И. Бабенко; школе-семинаре «Комплексы программ математической физики и архитектура ЭВМ» (Шушенское, 1985); Всесоюзном совещании по механике реагирующих сред (Красноярск, 1988); XIII (Ленинград, 1984), XIV (Новосибирск, 1987), XXII (Санкт-Петербург, 2010) Всесоюзных семинарах по струйным, отрывным и нестационарным течениям; неоднократно на семинарах ЛМИ и ВЦ СО АН СССР (г. Красноярск); семинарах ВМК МГУ

(Москва, 1988), ИТПМ СО АН СССР (Новосибирск, 1988), ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР (Москва, 1989); института механики УНЦ РАН (Уфа, 2006); IX школе по пакетам прикладных программ (Иркутск, 91); Международных конференциях по задачам со свободными границами (Новосибирск, 1991), «Математические модели и численные методы механики сплошной среды» (Новосибирск, 1996), «Математические модели и методы их исследования» (Красноярск, 1997, 1999); неоднократно на семинаре «Математическое моделирование в механике» ВЦ СО РАН (ИВМ СО РАН); Всероссийской научно-практической конференции с Международным участием «Достижения науки и техники – развитию сибирских регионов» (Красноярск, 1999); Всероссийских конференциях «Математика в приложениях», приуроченных к 70- и 80-летию академика С.К. Годунова (Новосибирск, 1999, 2009); IV сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике «ИНПРИМ-2000» (Новосибирск, 2000); Международной научно-практической конференции «САКС-2001» (Красноярск, 2001); Всероссийской конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященной 70-летию со дня рождения академика А.Ф. Сидорова (Екатеринбург, 2003г.); III, IV, VI, XI Международных школах-семинарах «Модели и методы аэродинамики» (Евпатория, 2003, 2004, 2006, 2011); VII и VIII Международных конференциях «Забабахинские научные чтения», организованных РФЯЦ-ВНИИТФ (Снежинск, 2003, 2005); XX Всероссийской школе-семинаре «Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа (САМГОП)» (Абрау-Дюрсо, 2004); XXI Всероссийской школе-семинаре «Аналитические методы в газовой динамике (САМГАД)» (Санкт-Петербург, 2006); X Международной научной конференции «Решетневские чтения», посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева (Красноярск, 2006); XXVI и XXVII (посвященной 150-летию К.Э. Циолковского, 100-летию С.П. Королева и 60-летию Государственного ракетного центра «КБ им. академика В.П. Макеева») Российских школах по проблемам науки и технологий (Миасс, 2006, 2007); Всероссийской конференции «Проблемы механики сплошных сред и физики взрыва», посвященной 50-летию института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, 2007); IV Международной научно-практической конференции «Исследование, разработка и применение высоких технологий промышленности» (Санкт-Петербург, 2007); Всероссийской

конференции «Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение», приуроченной к 90-летию академика Л.В. Овсянникова (Новосибирск, 2009); V, X, XI, XII, XIII Международных семинарах «Супервычисления и математическое моделирование», организованных РФЯЦ-ВНИИЭФ (Саров, 2001, 2008, 2009, 2010, 2011); семинаре «Математика в приложениях», руководимым академиком РАН С.К. Годуновым (Новосибирск, ИМ им. С.Л. Соболева СО РАН, 2013).

Личный вклад автора. Результаты диссертационной работы опубликованы в 68 научных работах: 28 – статьи (из них: 24 (86%) – без соавторства, 15 – в рецензируемых изданиях, 10 – в журналах, рекомендованных ВАК России, 1 – в иностранной печати), 1 – монография (2 соавтора), 38 – тезисы. Автор принимал участие: в написании 4-х научных отчетов, 2-х научно-методических трудов; в выполнении 4-х грантов (из них: 2-х научного и 2-х учебно-методического профиля). Разработка *дискретно-аналитического подхода* (включая разработку и анализ отдельных вычислительных методов и алгоритмов), а также математическое моделирование на его основе двумерных стационарных *ударных течений* идеального и вязкого теплопроводного газа при больших числах Рейнольдса выполнены автором самостоятельно. Все программное обеспечение, реализующее на практике *дискретно-аналитический подход*, разработано автором также самостоятельно.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения, списка цитируемой литературы (по разделам), включающего 201 использованных источников. Каждая из глав диссертации имеет свою вводную часть, посвященную конкретной проблематике. Работа содержит 307 страниц машинописного текста, 68 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение. Сделан обзор и произведен анализ существующих подходов к математическому описанию в рамках модели сплошной среды *ударных течений* идеального и вязкого теплопроводного газа при больших числах Рейнольдса. Обоснована актуальность разработки *дискретно-аналитического подхода*, сформулирована цель работы,

показаны научная новизна и практическая значимость полученных научных результатов.

Глава 1. Обобщенные соотношения нулевого и первого порядков на криволинейном скачке уплотнения. Во вводной части к первой главе сделан обзор работ, где рассматривались *дифференциальные соотношения* (ДС), выполняющиеся на *схематизированных* фронтах криволинейного СУ и *ударной волны*, движущейся с ускорением. Далее, после обоснования *основных допущений*, дается последовательный вывод *обобщенных соотношений 0-го и 1-го* (дифференциальных) *порядков* на криволинейном СУ в двумерном (плоском или осесимметричном) стационарном неравномерном потоке вязкого теплопроводного совершенного газа при больших числах Рейнольдса. СУ при этом *схематизирован* поверхностью *сильного газодинамического разрыва*. «Обобщение» соотношений касается асимптотического учета в них фактора *вязкости-теплопроводности* (ВТ) на самом СУ и в его окрестности; в газодинамическом отношении они являются точными. В связи с тем, что *обобщенные соотношения 0-го порядка* (в невязком случае – обычные *соотношения на косом СУ*) часто встречаются в научной литературе и применяются в практических вычислениях, основное внимание сосредоточено на выводе *обобщенных соотношений 1-го порядка* (иначе, *обобщенных дифференциальных соотношений* (ОДСС)), впервые полученных автором настоящей работы. Существенно, что в трудоемком процессе их вывода применяется система символьных преобразований на ЭВМ (средства компьютерной алгебры) «REDUCE». Вязкие слагаемые при этом учитываются в приближении сдвигового слоя с асимптотическим порядком $O(1)$ при $Re_\infty \rightarrow \infty$.

Приведем окончательную запись ОДСС в матричной форме с малым параметром при старших производных и нелинейных членах.

$$a_{ij} \left(\hat{\Phi}_j \right)_n^\wedge + b_i K_w + c_{ij} \left(\Phi_j \right)_n + d_i \frac{\delta}{Y} + \varepsilon^2 \left[e_{ij} \left(\hat{\Phi}_j \right)_{nn}^\wedge + f_i K_w' + g_{ij} \left(\Phi_j \right)_{nn} + N_i \right] = 0,$$

$$\Phi = (w, \theta, p, h)^T; \quad i, j = 1, \dots, 4,$$

где

$$\delta = 0 \ (\delta = 1); \quad \varepsilon^2 = (Re_\infty)^{-1}; \quad N_i = N_i \left(\left(\hat{\Phi}_j \right)_n^\wedge, \left(\Phi_j \right)_n, \hat{\Phi}_j, \Phi_j, K_w \right).$$

образом зависят от газодинамических величин по обе стороны СУ. Важно, что в невязком случае коэффициенты $A \dots D$ в (1) после соответствующих допустимых преобразований в точности приводятся к аналогичным коэффициентам, полученным в независимом литературном источнике, где использована другая (удобная для невязкого случая) группа зависимых переменных.

Далее производится анализ ОДСС (1) с точки зрения их практического использования, в частности, делается вывод о необходимости замыкания соотношений.

Глава 2. Исключение краевого эффекта и модельная кривизна скачка уплотнения в неравномерном потоке идеального газа.

Вторая глава диссертационной работы посвящена проблеме замыкания ОДСС в частном случае, когда отсутствует действие фактора ВТ (в (1) $\varepsilon^2 = 0$). Поскольку в предельном невязком случае полученные асимптотические соотношения переходят в невязкие ДС, но проблема, связанная с их замыканием, сохраняется (!) даже при полной определенности газодинамических параметров по обе стороны СУ и производных от них в течении до СУ, вполне разумно поиск недостающего уравнения осуществить сначала в более простой постановке – при отсутствии фактора ВТ, что и делается в настоящей главе работы.

Для замыкания ДС необходимо задать какую-либо из производных за СУ или их комбинацию, то есть определить **краевой эффект** (КЭ) за СУ. В качестве таковой может быть использована дополнительная (по отношению к ОДСС) *дифференциальная связь*, в частности, *исключающая КЭ*; *связь* в этом случае имеет точный смысл и строго выводится из основных законов сохранения. Необходимость введения термина «КЭ» вызвана, прежде всего, нестандартной (не краевой) постановкой задачи для исследуемого стационарного *ударного течения* и лишь частичным смысловым совпадением с общепринятым термином «*краевое (граничное) условие*», используемым обычно при решении краевых (начально-краевых) задач. КЭ за СУ имеет производный (дифференциальный) смысл от термина «*краевое условие*» применительно к задней поверхности скачка; КЭ имеет отношение к продолженной системе соответствующих законов сохранения и необходим для замыкания *соотношений 1-го порядка* на СУ. КЭ может совпадать или не совпадать с реальным *краевым условием* того же порядка, например, когда СУ оказывается

присоединенным к границе области. КЭ имеет смысл локального источникового члена в каждой расчетной точке задней поверхности СУ. Важно заметить, что величина КЭ никак не связана с текущей интенсивностью СУ: например, при обтекании клина сверхзвуковым потоком, КЭ за СУ будет нулевым при конечной интенсивности присоединенного плоского скачка и, наоборот, в другой задаче, КЭ может быть весьма значительным при малой интенсивности СУ.

После замыкания ДС (ОДСС (1), $\varepsilon^2=0$) с помощью *дифференциальной связи* полученная система уравнений (ОДУ) становится однозначно разрешимой относительно производных за СУ и его кривизны в любой его расчетной точке и может быть численно проинтегрирована вдоль фронта скачка. Причем в данном случае ($\varepsilon^2=0$) линейные относительно производных ДС позволяют разрешить их в общем виде и найти явные аналитические зависимости для производных за СУ и его кривизны. Для получения числовых значений этих величин КЭ должен быть определен, то есть должны быть заданы конкретные коэффициенты *дифференциальной связи*.

Рассматривается важный частный случай образования *дифференциальной связи* производных за СУ. Реальный КЭ за СУ часто неизвестен *a priori*, поэтому при расчете кривизны скачка вместо реального КЭ за ним может быть поставлено то или иное *модельное* условие, в частности, исключающее влияние *догоняющих возмущений*. Вводятся понятия *модельной* и *рефракционной* кривизны СУ. С помощью соотношений на характеристиках строго доказывается, что условие, исключающее влияние *догоняющих возмущений (исключающее условие)* будет иметь вид (см. рис. 1):

$$\hat{p}_s^{\wedge} + \hat{m}^{-\chi} \cdot \hat{p}_n^{\wedge} = 0, \quad \hat{m}^{-\chi} = \frac{-\chi}{\sqrt{\hat{\alpha}_M^2 - 1}} = -\chi \operatorname{tg}(\hat{\alpha}_M), \quad (2)$$

где $\hat{\alpha}_M$ – *угол Маха* за СУ ($\hat{M} > 1$). Видно, что коэффициент $\hat{m}^{-\chi}$ в (2) фиксирует в (\hat{s}, \hat{n}) -координатах за СУ наклон характеристики противоположного ему семейства $-\chi$ (элемент 3 на рис. 2, а). Таким образом, выражение (2) означает равенство нулю полной производной от давления в указанном направлении или локальную для точек на задней поверхности СУ *изобаричность* в этом направлении.

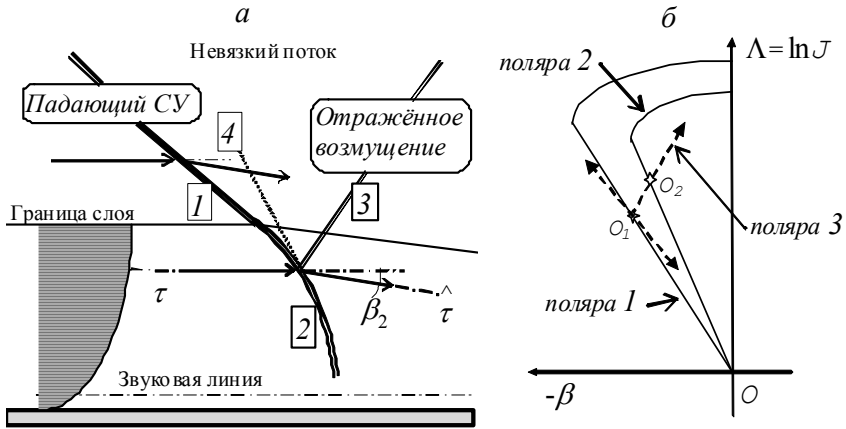


Рис. 2. Схема взаимодействия скачка уплотнения со сдвиговым слоем в невязкой (вихревой) плоской постановке: *а* – физическая плоскость; *б* – плоскость поляр

Условие (2), переписанное в терминах только нормальных производных, будет иметь вид:

$$\frac{\partial \ln \hat{p}}{\partial \hat{n}} + \chi \Gamma(\hat{M}) \left(\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{n}} + \frac{\delta}{y} \sin \hat{\theta} \right) = 0, \quad \Gamma(\hat{M}) = \frac{\gamma \hat{M}^2}{\sqrt{\hat{M}^2 - 1}}, \quad \gamma = c_p / c_v, \quad (3)$$

где переменный коэффициент $\Gamma(\hat{M})$, $\hat{M} > 1$, введенный В.Н. Усковым, имеет, как и переменный коэффициент $\hat{m}^{-\chi}$ в (2), ясный физический смысл и представляет собой модуль наклона ударной поляры 3, изображенной на рис. 2, б, в начале ее системы координат – точке O_1 .

На рис. 2, а схематично, в невязком приближении, представлен физический процесс проникновения СУ в непрерывный вихревой сдвиговый слой: $\chi = -1$ для падающего СУ, 1...3 – основные элементы рефракции СУ, 4 – догоняющие возмущения, несущие КЭ, а τ и $\hat{\tau}$ – одна и та же линия тока до и за СУ соответственно, являющаяся вырожденным тангенциальным разрывом (ТР): его интенсивность обратно пропорциональна количеству разбиений непрерывного профиля скорости. На рис. 2, б с большей степенью схематизации (исключен КЭ 4), представлена динамика этого процесса в плоскости

ударно-волновых поляр (УВП) в координатах $(\beta, \Lambda = \ln(\mathcal{J}))$, где $\beta = \hat{\theta} - \theta$ – угол преломления вектора скорости на СУ (см. рис. 1; на рис. 2, а для проникающего СУ ему соответствует β_2), а $\mathcal{J} = \hat{p}/p$ – интенсивность СУ. Поляры 1 и 2 соответствуют двум соседним линиям тока в невозмущенном течении (рис. 2, а) с малым различием (в силу непрерывности заданного профиля) чисел Маха, а поляр 3 отвечает линии тока за падающим СУ (числу Маха \hat{M}).

Сделаем важное дополнение. Таким образом, условие (2), исключая влияние догоняющих возмущений с задней стороны фронта СУ, делает тем самым форму этого фронта полностью зависимой от неравномерностей (градиентов величин) натекающего потока и наличия осевой симметрии в нем; кривизна СУ при этом может быть большой. Очевидно, что при общей постановке задачи внешнего сверхзвукового обтекания исключение указанных возмущений некорректно, поскольку они значимы и вносят основной вклад в процесс формирования ударного фронта.

В рамках присоединенной к (1) дифференциальной связи (2), представляющей собой *исключающее условие* и имеющей в связи с этим точный смысл, рассмотрены другие особые значения ее направляющего коэффициента: $\lambda \cdot \hat{m}^{-\lambda}$, когда $\lambda = -1$, $\lambda \rightarrow \pm \infty$ (усеченная модель: $\hat{p}_n^{\wedge} = 0$ вместо (2)) и $\lambda \rightarrow 0$ ($\hat{p}_s^{\wedge} = 0$ вместо (2)). При исследовании ограничений в задании КЭ вводятся понятия *правого* и *левого* комплексов ($\lambda = 1, -1$ соответственно), *инварианта Ускова* при $\lambda = -1$ и вырождении СУ в *слабый разрыв* (СЛР). Более подробно допустимые границы в задании КЭ за СУ рассмотрены в главе 3 настоящей диссертации.

Построенная приближённая модель СУ с КЭ, исключаяющим влияние догоняющих возмущений, оказывается полезной в ряде практических приложений, в которых влияние указанных возмущений незначительно и исходная краевая задача может быть упрощена переходом к предложенной модели СУ с соответствующей редукцией основных дифференциальных (в частных производных) законов сохранения к системе ОДУ.

На рис. 3 представлены сравнительные расчеты проникновения СУ в осесимметричный *тонкий вихревой слой* (ТВС), выполненные с привлечением полной двумерной (уравнения Эйлера с различными

вариантами краевых условий в точке падения СУ на ТВС; метод характеристик с выделением фронта СУ) и рассмотренных выше приближенных моделей.

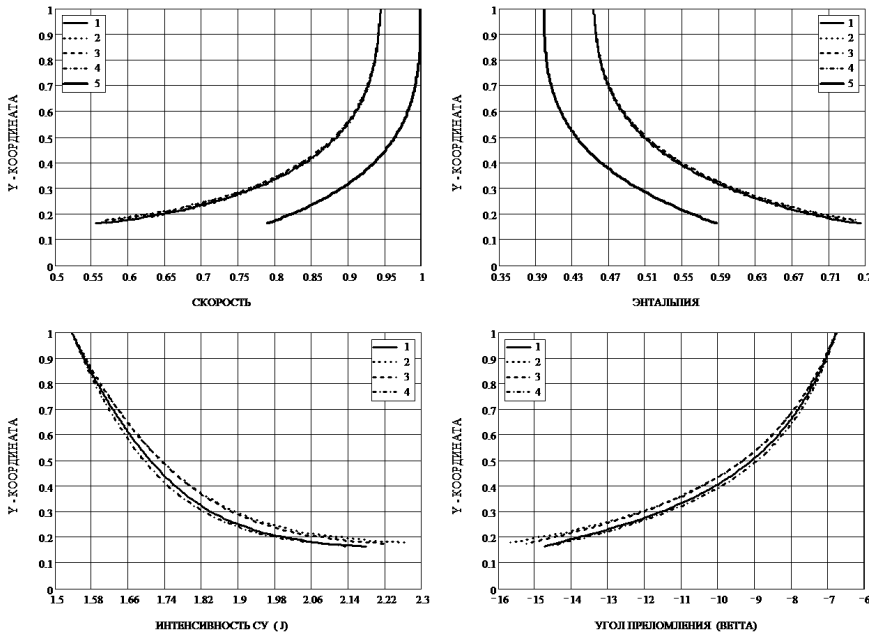


Рис. 3. Распределения параметров по толщине ТВС вдоль задней поверхности СУ для разных моделей (β в градусах): 1 – *рефракционная модель* (исключено влияние *догоняющих возмущений*); 2 – *усечённая модель*; 3 – полная двумерная модель (метод характеристик) с граничным условием – прямолинейная линия тока за СУ в начальной точке; 4 – то же, с граничным условием – постоянство давления вдоль линии тока за СУ в начальной точке; 5 – профили скорости и энтальпии в невозмущённом (до СУ) ТВС

Невозмущенный модельный ТВС задавался с вырожденными (постоянными) профилями полной энтальпии, давления и наклона линий тока; профиль числа Маха — в виде кубического полинома с непрерывным переходом по 1-й и 2-й производным от параметров внешнего (невязкого) потока, помеченных далее индексом « ∞ ». Вычислительные координаты x (вдоль оси симметрии) и y (поперёк ТВС) были обезразмерены толщиной самого слоя, так что он в начальной точке падения СУ имел единичную толщину. Значения без-

размерных газодинамических параметров внешнего потока и параметров на оси, совместно определяющие невозмущённый ТВС, были следующими: $M_\infty = 2,5$; $\rho_\infty = 1$; $\bar{W}_\infty = 1$ при $y = 1$ и $M_{y=0} = 1,01$ при $y = 0$. Полная энтальпия и давление определялись из соотношений: $H = h_\infty + \bar{W}_\infty^2/2$, $h_\infty = \bar{W}_\infty^2/[(\gamma - 1)M_\infty^2]$; $p = \rho_\infty h_\infty (\gamma - 1)/\gamma$, а угол наклона линий тока $\theta = 0$. Текущая энтальпия внутри ТВС рассчитывалась по известному профилю числа Маха $M = M(y)$, $y \in (0,1]$, $h = H_\infty/\left[1 + (\gamma - 1)/2 \cdot M^2\right]$. Во всех расчётах начальная интенсивность падающего СУ $J_\infty(t_{\%}) = J_s t_{\%}/100\%$ составляла $t_{\%} = 25\%$ от логарифма $\Lambda_s = \ln(J_s)$ звуковой интенсивности скачка.

В приведенных на рис. 3 графических зависимостях (особенно для скорости и энтальпии) заметного отличия между возмущенными (т.е. за СУ) решениями, полученными с помощью различных полных и приближенных моделей, не наблюдается, отчасти в силу «сильно работающего» осесимметричного эффекта, учитываемого всеми математическими моделями. Различие в профилях интенсивности J и углов преломления β между моделями уже заметно; при этом все кривые лежат в узком (максимальная относительная ошибка менее 10%) коридоре величины.

На этих же графиках хорошо заметен универсальный характер *рефракционной модели*: сплошная кривая 1 располагается внутри коридора конкретной величины, ближе к его середине. Заметим, что только эта модель исключает влияние *догоняющих возмущений*.

Глава 3. Замыкание ОДСС с помощью дифференциальной связи. В третьей главе, сначала только на примере невязкого нетеплопроводного газа, рассмотрен уже общий – универсальный способ замыкания ОДСС (1) ($\varepsilon^2 = 0$), допускающий в рамках привлеченной для этой цели дополнительной *расширенной дифференциальной связи*

$$\hat{p}_s^{\wedge} + b \cdot \hat{m}^{-\chi} \cdot \hat{p}_n^{\wedge} = c, \quad \hat{m}^{-\chi} = \frac{-\chi}{\sqrt{\hat{\Lambda}^2}} = -\chi \operatorname{tg}(\hat{\alpha}_M) \quad (4)$$

с параметрами b и c , задание, как реального *краевого эффекта* за СУ, когда о нем имеется априорная информация, так и любого *модельного КЭ*, в противном случае: например, для изучения влияния

тех или иных КЭ на динамику скачка. При этом в частном случае *изобарической связи* ($c=0$ в (4)) значение ее параметра $b=1$ будет соответствовать *исключающему условию* (2), а $b = \frac{\hat{\alpha}_y}{m_y} / \frac{\hat{\alpha}_x}{m} \approx -1$, где

$\frac{\hat{\alpha}_x}{m} = \text{tg}(\hat{\alpha}_m^x)$, $\frac{\hat{\alpha}_y}{m_y} = \text{tg}(\hat{\alpha}_y^x)$, $\hat{\alpha}_y^x$ — *угол Ускова* (согласно авторству одного из ранних соотношений), — запрещенным *сильным* КЭ за СУ. Данный угол по своим значениям оказывается близким к значениям *угла Маха* за СУ $\hat{\alpha}_m^x$, и поэтому может рассматриваться как некоторый «двойник» известного угла. Однако в отличие от последнего, *угол Ускова* имеет отношение исключительно к задаче 1-го порядка — к продолженной системе законов сохранения (соотношений) на гладком криволинейном СУ, но сам при этом никак не зависит от его формы и существует, в том числе и за плоским скачком. Приведены расчеты, показывающие незначительное отличие вышеуказанных углов в зависимости от числа Маха набегающего потока и интенсивности СУ (предполагается $\hat{M} > 1$).

В общем случае, с помощью управления свободными параметрами b и c связи (4), могут быть заданы, в том числе и реальные КЭ за СУ.

Приводятся демонстрационные расчеты, выявляющие роль направляющего коэффициента *изобарической дифференциальной связи* (4). Из этих расчетов следует, что при малых и даже средних симметричных отклонениях параметра $b = (1 \pm \Delta)$; $\forall \Delta > 0$ направляющего коэффициента в (4) получаемые возмущенные решения мало различимы и сливаются с решением, полученным строго по *рефракционной модели* ($b=1$). При этом графики газодинамических параметров за СУ практически эквидистантны соответствующим графикам невозмущенных параметров в сдвиговом слое (перед СУ). Данное свойство *рефракционной модели* позволяет практически без ущерба игнорировать слабые КЭ и обходиться приближенной постановкой задачи. Совершенно иная ситуация возникает, когда в (4) значения параметра $b \approx -1$, точнее задаются выражением $b = \left(\frac{\hat{\alpha}_y}{m_y} / \frac{\hat{\alpha}_x}{m} \right) (1 \pm \Delta)$;

$\forall \Delta > 0$, $\Delta \sim 0$ в окрестности запрещенного значения, определяемого *углом Ускова*. В этом случае при $\Delta \rightarrow 0$ имеет место своего рода «*градиентная катастрофа*» в прямом (скачок резко увеличивает свою

интенсивность) либо в обратном ($\mathcal{J} \rightarrow 1$, $\text{СУ} \rightarrow \text{СЛР}$) направлениях. В обоих случаях радиус такого принудительного разворота СУ стремится к нулю (кривизна $\text{СУ} \rightarrow \pm\infty$), что соответствует образованию угловой точки на нем.

В случае использования модели вязкого теплопроводного газа и асимптотических ОДСС (1) ($\varepsilon^2 \neq 0$) отмеченные выше ограничения в задании определенных КЭ становятся особо жесткими, поскольку большие кривизны СУ вызывают нарушение *основных допущений*, при которых были получены сами ОДСС. Необходимо отметить, что в вязком случае задание КЭ с помощью (4) подразумевает также использование и *дифференциального следствия* этой связи.

При полной определенности газодинамических параметров перед СУ, после дополнения ОДСС (1) уравнениями, представляющими *связь* (4) и ее *следствие* (в вязком случае), окончательная система *рабочих уравнений* (РУ), полученных из ОДСС, оказывается замкнутой и может быть численно проинтегрирована вдоль фронта скачка по ходу его эволюции.

Глава 4. Математическое моделирование ударных течений вязкого теплопроводного газа на основе асимптотической модели. В четвертой главе, после проведенных в главах 1–3: математического вывода ОДСС (1) и их анализа, изучения возможных способов задания различных КЭ за СУ с помощью *расширенной дифференциальной связи* (4), моделируется процесс взаимодействия скачка со сдвиговым слоем в вязкой и невязкой постановках задачи. СУ *схематизируется* криволинейной поверхностью *сильного газодинамического разрыва*, на которой выполняются ОДСС, асимптотически учитывающие фактор ВТ. Во вводной части к главе 4, посвященной математической постановке вязкой задачи о взаимодействии СУ со сдвиговым слоем, дополнен список *основных допущений* (с обоснованием), сформулированных в первой главе. Анализируются, с точки зрения вычислительных затрат и качества получаемого решения (т.е. эффективности), различные подходы к математическому моделированию рассматриваемой задачи взаимодействия. Делается обоснованный вывод, подтверждаемый впоследствии математическими расчетами в настоящей главе (см. *основные научные результаты* или *общие выводы*), что явный учёт в рамках применяемых ОДСС фактора ВТ необходим для правильного воспроизведения физической картины проникновения СУ в сдвиговый слой.

Дается детальное описание вычислительных методов и алгоритмов интегрирования РУ, следующих из ОДСС после их замыкания и разностной аппроксимации старших производных за СУ. Вначале излагается вычислительный алгоритм для частного случая – интегрирования невязких РУ (в ОДСС (1) $\varepsilon^2=0$). Рассмотрены *два способа* определения решения на скачке. *Первый* основан на интегрировании аналитического выражения только для кривизны скачка и использовании *соотношений 0-го порядка* (обычных условий на косом СУ) для нахождения всех параметров за СУ. *Второй* — на интегрировании всех компонент вектора производных за СУ, включая кривизну. Несмотря на то, что оба *способа* фактически тождественны, *второй* имеет преимущество, поскольку не требуется поточечная постановка *условий на СУ*, кроме начальной точки, откуда начинается эволюция скачка.

Далее излагается вычислительный алгоритм для общего случая – интегрирования вязких нелинейных РУ, не предусматривающий нормализацию системы. По причине отсутствия старших (вторых) производных в первом из РУ системы – *законе сохранения массы*, она без дополнительных математических ухищрений не может быть приведена к нормальной форме, которая к тому же лишена смысла при $Re_\infty \rightarrow \infty$: следовательно, для численного интегрирования уравнений системы нельзя воспользоваться стандартными методиками. В связи с этим разработаны эффективные итерационные (на эволюционном шаге) методы интегрирования указанной системы, не требующие ее нормализации: первый итерационный процесс (5) основан на использовании *невязкого нулевого приближения*, которое находится аналитически, второй (6) представляет собой модификацию численного *метода Ньютона в приращениях* без обращения матрицы Якоби.

Приведем математическую запись обоих итерационных процессов (см. ОДСС (1)).

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^0 - \varepsilon^2 \mathbf{A}^{-1} \left(e_{ij} \left(\hat{\Phi}_j \right)_{nn}^k + f_i \left(K_w' \right)^k + g_{ij} \left(\Phi_j \right)_{nn} + N_i^k \right)_{i=1..4}^T, \quad k=0,1,\dots,K$$

$$\mathbf{X}^0 = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}^0, \quad \mathbf{A} = \left(a_{i,j=1,2}, b_i, a_{i4} \right)_{i=1..4}, \quad \mathbf{b}^0 = - \left(c_{ij} \left(\Phi_j \right)_n + d_i \left(\delta/y \right) \right)_{i=1..4}^T \quad (5)$$

В (5) $\mathbf{X} = \left(\hat{W}_n, \hat{\theta}_n, K_w, \hat{h}_n \right)^T$ – неизвестный вектор производных за СУ

(\hat{p}_n, \hat{p}_{nn} исключены дифференциальной связью (4), представленной в форме (3) через нормальные производные), \mathbf{X}^0 – нулевое (невязкое) приближение ($\varepsilon^2=0$) вектора \mathbf{X} , k – итерационный индекс.

Второй (ньютоновский) итерационный процесс может быть представлен следующим образом:

$$\mathbf{J}^k \Delta \mathbf{X} = -\mathbf{F}^k, \quad \Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k, \quad \mathbf{J}(\mathbf{X}) = \mathbf{DF}(\mathbf{X})/D\mathbf{X}, \quad k=0,1,\dots,K, \quad (6)$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ – вектор правых частей, содержащий компоненты невязок в системе дифференциально-разностных РУ при подстановке в нее текущего значения \mathbf{X}^k . В (5), (6) вторые (старшие) производные за СУ аппроксимированы с помощью разностных представлений через первые и, следовательно, якобиан $\mathbf{J}(\mathbf{X})$ в (6), в отличие от матрицы \mathbf{A} в (5), зависит от фактора ВТ, что положительно сказывается на скорости сходимости итерационного процесса. В (6) в качестве \mathbf{X}^0 в каждой расчетной точке СУ берется уже не *невязкое приближение* $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}^0$ (5), а найденное в предыдущей точке СУ значение \mathbf{X} с учетом фактора ВТ.

По завершении итерационного процесса *по нелинейности* нахождения \mathbf{X} в новой расчетной точке пересчитываются форма и положение СУ, определяются газодинамические параметры перед и за ним либо 1-м, либо 2-м способом (см. выше). Далее весь процесс определения формы СУ повторяется до достижения сходимости. Существенно, что в процессе интегрирования (2-м способом) удается обходиться без поточечной постановки *обобщенных соотношений 0-го порядка на СУ*: эти условия с высокой точностью будут выполняться уже автоматически (!).

Получено *стационарное аналитическое* (в расширенном смысле) *решение* задачи проникновения СУ в сдвиговый слой. Проведено сравнение математических решений задачи, полученных с применением вязких и невязких моделей разной сложности. Приведено множество графических зависимостей по результатам моделирования. Показано, что неучет в явном виде фактора ВТ в дифференциальной модели при расчете возмущенного течения в слое может привести к неверному конечному результату.

В ходе многочисленных расчетов, где использовалась *стационарная модель* на основе ОДСС (1), было замечено: если имеет место сильный ослабляющий или усиливающий СУ КЭ, то влияние фактора ВТ на процесс проникновения скачка в слой больше и кривые, соответствующие *вязким* и *невязким решениям* расходятся сильнее. Это вполне объяснимо, так как исключение КЭ (фактически разглаживание течения за СУ) уменьшает влияние фактора ВТ: градиенты газодинамических параметров входят в величины вязких напряжений и теплового потока.

На рис. 4 показан *характеристический коридор* для *вязких* и *невязких* решений с КЭ и без такового для начальной интенсивности СУ $J_\infty (t_0 = 63,7\%)$, проникающего в плоский сдвиговый слой (взята сверхзвуковая часть *пограничного слоя* (ПС)).

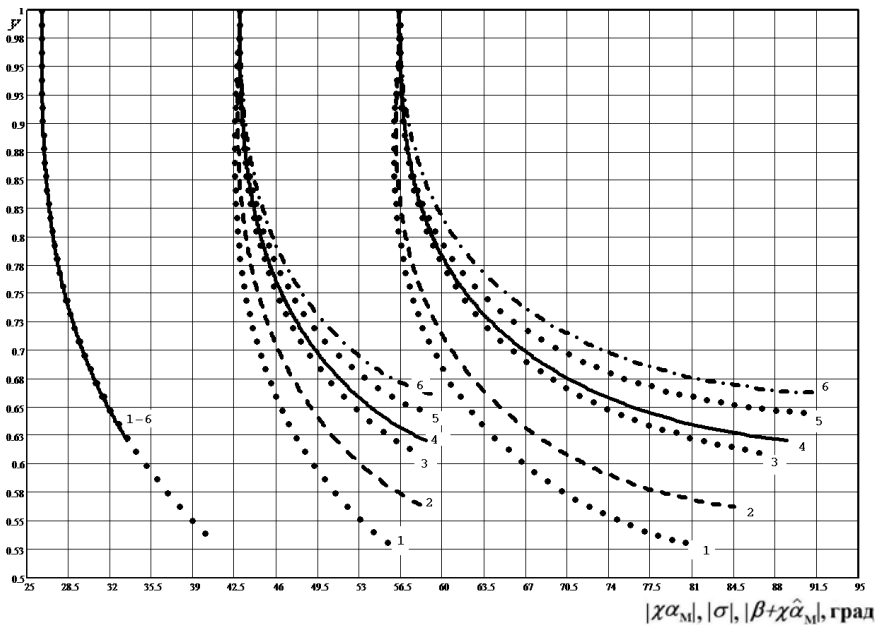


Рис. 4. *Характеристический коридор*: слева — перед СУ; в центре — на СУ; справа — за СУ; 1 — вязкое решение при КЭ, ослабляющем СУ; 2 — невязкое решение при КЭ, ослабляющем СУ; 3 — вязкое решение без КЭ (*исключающее условие*); 4 — невязкое решение без КЭ; 5 — вязкое решение при КЭ, усиливающем СУ; 6 — невязкое решение при КЭ, усиливающем СУ

Здесь $J_\infty(t_\%) = J_s t_\%/100\%$; J_s – звуковая интенсивность СУ, соответствующая $\hat{M} = 1$. Конкретные значения безразмерных газодинамических параметров внешнего потока и на плоскости симметрии, совместно определяющие невозмущенный ПС, были следующими: $\gamma = 1,4$; $M_\infty = 2,5$; $\rho_\infty = 1$; $W_\infty = 1$ при $y = 1$ и $W_{y=0} = \theta_{y=0} = 0$ при $y = 0$; $Re_x = \rho_\infty W_\infty x / \mu_\infty \sim 1,3 \cdot 10^3$ в начальной точке падения СУ на ПС; $Pr = 1$.

Характеристический коридор представляет в каждой расчетной точке СУ значения величин $|\chi\alpha_M|$ (перед СУ), $|\sigma|$ (на СУ, см. рис. 1), $|\beta + \chi\alpha_M^\wedge|$ (за СУ) – модулей углов наклона СУ и характеристик одного с ним семейства по обе его стороны к текущей линии тока в невозмущенном течении.

Очевидно, что при полном вырождении СУ за счет КЭ или (и) ВТ все три однотипные кривые из различных семейств (см. рис. 4), соответствующие конкретному решению, должны пересечься в одной точке внизу: *коридор* «схлопывается». Из рис. 4 видно, что вне зависимости от того, является ли КЭ ослабляющим или усиливающим СУ, всегда имеет место частичное сужение *характеристического коридора* за счет ослабляющего действия фактора ВТ на СУ. Таким образом, если имеет место ослабляющий СУ КЭ, то в результате суммарного, направленного на ослабление скачка, действия обоих факторов сужение *коридора* оказывается более значительным.

Сформулированы многочисленные выводы по результатам математического моделирования проникновения СУ в сдвиговой слой.

Глава 5. Метод численного моделирования двумерных стационарных сверхзвуковых газодинамических течений с множеством разрывов. Пятая глава целиком посвящена математическому моделированию течений идеального газа. Во вводной части приводится краткий обзор численных методов (подходов), применяющихся для решения задач сверхзвуковой газовой динамики. При их анализе основной упор делается на логическую сложность алгоритма, представление искомых величин и качество получаемого решения. Дается описание маршевого численного метода расчета двумерных стационарных сверхзвуковых газодинамических течений с *выделением* множества *разрывов* (дискретных особенностей). В основе метода лежит адаптированная к особенностям комбинированная сетка с ди-

намически изменяющейся структурой. Ее регулярная часть – *решетка* (она несогласованна с *разрывами*) предназначена для воспроизведения гладкой части решения, сингулярная — разрывной. Такая конструкция полной сетки совместно с локальным применением *аналитического аппарата* делает возможным массовое *выделение* возникающих в моделируемом течении *ударно-волновых конфигураций* (структур) из *сильных* и *слабых разрывов* (СЛР), выявляя детальное устройство потока в соплах, каналах и струях. В процессе расчета допускается автоматический переход отдельных *выделяемых поверхностей* (ВП) *разрывов* на их *сквозной счёт* в зависимости от изначально выбранных критериев качества (разрешающей способности), а также появление новых и исчезновение вырожденных, утративших свою силу, ВП.

ВП могут являться фактические *разрывы* (*сильные* и СЛР) всех существующих типов и направлений, а также *фиктивные разрывы* (характеристики) соответствующих семейств. Предложен оригинальный эффективный фильтр ВП на основе решения локальной «задачи о взаимодействии двух произвольных плоских однородных сверхзвуковых потоков», позволяющий ограничивать разрешающую способность (детализацию) вычислительного алгоритма *метода выделения разрывов* (МВР) при образовании «сгустков» из ВП, замедляющих расчет.

В разделах главы дано детальное описание: конструкции полной расчётной сетки и комбинаторных операций над множеством её нерегулярных (*лагранжевых*) узлов; методов расчёта гладкой и разрывной компонент решения с учетом локального (в пределах шага) определения формы ВП; процедуры выбора шага интегрирования по маршевой координате; решения задач интерференции, инициирования и фильтрация ВП.

Проведено масштабное вычислительное моделирование плоских и осесимметричных стационарных струйных и канальных газодинамических течений с множеством *разрывов*. Показаны высокая разрешающая способность, быстрая сходимость и эффективность данного МВР, а также качественное и количественное отличия численных решений, полученных на одних и тех же расчетных сетках, данным МВР и *методом сквозного счета* (МСС).

Приведем некоторые результаты математического моделирования. На рис. 5, 6 моделируемые течения показаны в виде линий уровня значений газодинамических величин (функций): -

$10 \cdot \log$ (давление), число Маха, угол наклона линий тока (к оси OX), полное давление, причем маркировка линий уровня соответствует отрезку натурального ряда, если отсутствует дробная часть числа в маркере. Для удобства сопоставления результатов вычислений между собой при расчётах выполненных МВР и МСС линии уровня строятся в одном общем (для обоих расчётов) масштабе данной величины, при этом существенно, что интерполяция значений величин через ВП (для МВР) не делается. Траектории ВП на тех же рисунках представлены дискретно в виде последовательности точек, соответствующих расчётным слоям по маршевой координате x . Над расчётной областью выполнено аффинное преобразование с целью оптимального размещения её в пределах рамки рисунка, кроме того, из соображений экономии места внутренний цилиндр для осесимметричных кольцевых течений исключен. Для левых половинок рисунков ось OY , направлена от центра влево, для правых — от центра вправо. Ось OX совпадает с осью (либо лежит в плоскости) симметрии течения и направлена снизу вверх, таким образом, начальное сечение (слой) располагается снизу картинке.

На рис. 5 представлен расчёт осесимметричной задачи о движении (торможении) газа ($\gamma = 1,4$ – воздух) в кольцевом сужающемся канале, имеющем излом верхней образующей в начальном сечении. Расчёт выполнен на разностной *решётке* с 21 узлом как в случае использования МВР, так и МСС (РС *Лакса-Вендроффа*). Заметим, что стационарная постановка такой задачи с целью проверки работоспособности маршевых методик вполне корректна. Параметры кольцевого канала в начальном сечении таковы: число Маха втекающего равномерного потока $M = 3,0$; нижняя граница располагается на расстоянии 0,5 входного калибра от оси симметрии течения, верхняя — на 1,5; излом верхней стенки $\Delta\theta = -5^\circ$. Размещение на оси симметрии течения цилиндра объясняется желанием исключить режим нерегулярного (*маховского*) отражения СУ. Расчёт автоматически останавливался при достижении моделируемым течением местной скорости звука в одной из точек сечения.

Анализируя приведенный на рис. 5 расчёт можно утверждать: МВР обеспечивает значительно более высокое качество разрешения внутреннего устройства канального газодинамического течения, чем МСС. Заметим, что решение, полученное МСС на более мелкой разностной *решётке* (201 узел; в автореферате не приводится) практически сходится к решению, полученному МВР (21 узел *решётки*), а в

плоском случае точное решение аналогичной задачи получается МВР уже на одной (!) ячейке *решётки*. Если не принимать во внимание всплески, вызванные немонотонностью РС *Лакса-Вендроффа* (МСС), то результаты, полученные по обоим методикам, хорошо согласуются между собой.

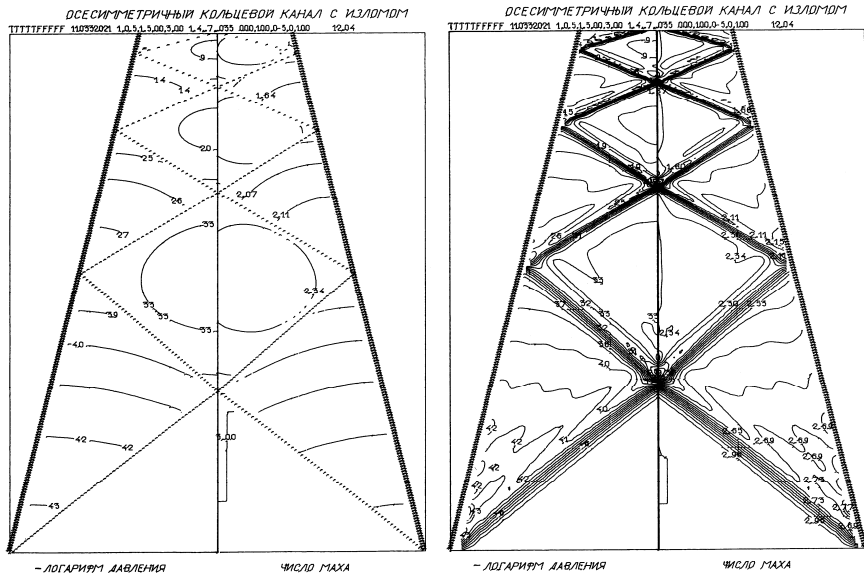


Рис. 5. Расчет МВР и МСС торможения газа ($\gamma=1,4$; $M=3,0$) в осесимметричном кольцевом сужающемся канале, имеющем излом ($\Delta\theta=-5$) верхней образующей в начальном сечении. С целью удобства сравнения решений, полученных МВР и МСС, оцифровка линий уровня величин в обоих расчетах единая

На рис. 6 приведены расчёты МВР сверхзвуковых струй: плоской и осесимметричной кольцевой. Общие исходные параметры струй таковы: число Маха в выходном сечении сопла $M=4,0$; показатель изэнтропы газа $\gamma=1,3$; нерасчётность при истечении в затопленное пространство $n=10$ (недорасширение). В плоском случае расчёт выполнен на разностной *решётке* с 61 узлом, в осесимметричном — с 201.

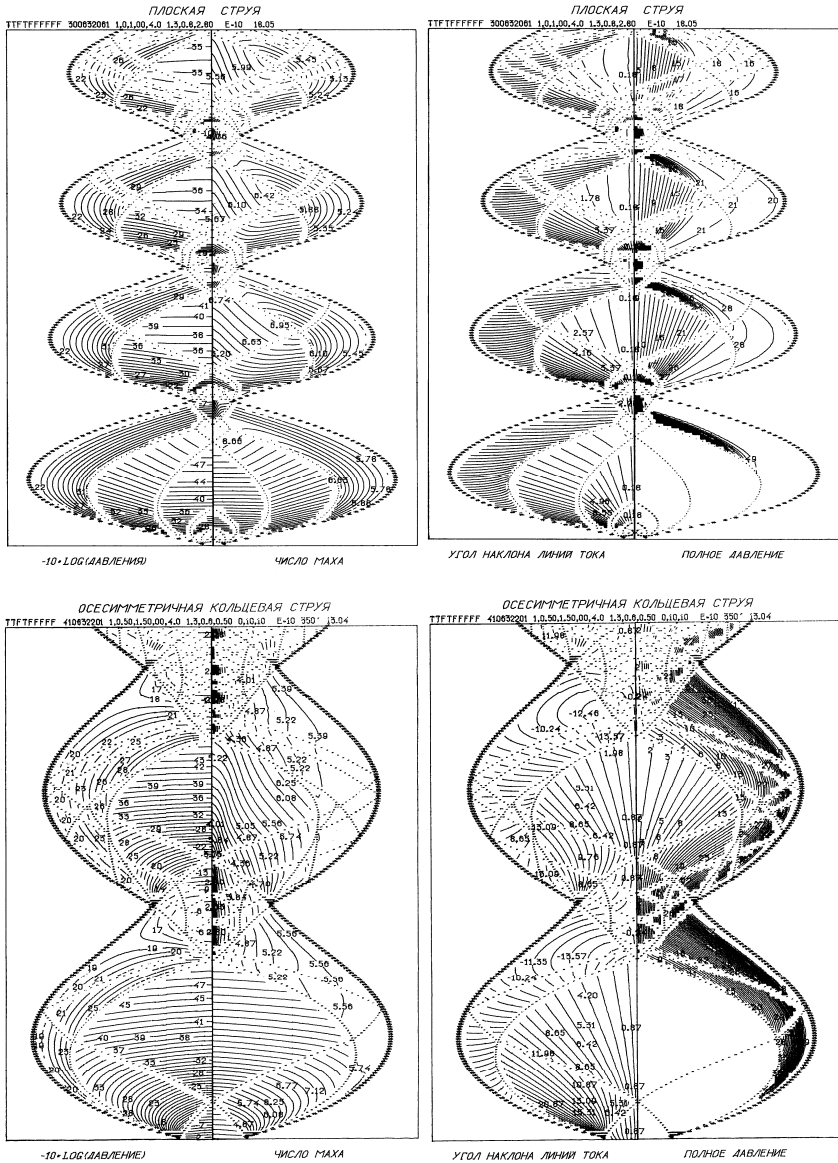


Рис. 6. Расчет МВР плоской (сверху) и осесимметричной кольцевой струй газа ($\gamma = 1,3$; $M = 4,0$), истекающих в затопленное пространство с нерасчетностью $n = 10$

В ходе расчётов применялась фильтрация ВП и, поэтому «жизнь» внутренних ВП характеристик центрированной волны *разрежения* (ВР), не являющихся СЛР, ограничена моментом их касания противоположной границы расчётной области. Момент перехода крайних характеристик ВР, являющихся СЛР, в *сильный разрыв* с последующим увеличением их интенсивности хорошо отслеживается по профилю *полного давления*.

Для осесимметричной кольцевой струи (рис. 6 снизу), истекающей из конического кольцевого сопла в затопленное пространство, исходными параметрами, составляющими отличие от плоской постановки задачи, являлись следующие: в начальном сечении нижняя граница (цилиндр) располагалась на расстоянии 0,5 входного калибра от оси симметрии течения, верхняя — на 1,5. Распределение газодинамических параметров в начальном сечении соответствовало обобщенному на кольцевой случай «течению от источника» с углом полураствора $\alpha = 10^\circ$, в плоском случае — равномерный поток.

В ходе всех расчётов контролировалась интегральная (по расходу массы) ошибка при переходе от одного расчётного слоя к другому, которая во всех случаях не превышала 0,05%.

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

1. Впервые получены *обобщенные дифференциальные соотношения* (ОДСС) на *схематизированном* криволинейном скачке *уплотнения* (СУ) в двумерном (плоском или осесимметричном) неравномерном потоке вязкого теплопроводного совершенного газа при больших числах Рейнольдса ($Re_\infty > 10^3$). *Вязкие слагаемые* в ОДСС учтены асимптотически в приближении сдвигового слоя. ОДСС связывают нормальные к линиям тока частные производные 1...2-го порядка от газодинамических величин по обе стороны СУ с его геометрическими характеристиками. В предельном невязком случае полученные соотношения являются точными и после стандартных аналитических преобразований тождественно совпадают с известным ранее результатом. Окончательно ОДСС представлены в матричной форме с малым параметром $\varepsilon^2 = (Re_\infty)^{-1}$ при старших производных и нелинейных членах. Несмотря на применение асимптотических упрощений, ОДСС и следующие после замыкания из них ОДУ представляют собой громоздкие математические выражения, поэтому, в

процессе их получения применяются средства компьютерной алгебры (*система символьных преобразований* на ЭВМ «REDUCE»).

2. Найден универсальный способ замыкания ОДСС с помощью *расширенной дифференциальной связи*, допускающий учет реального *краевого эффекта* (КЭ) за СУ, а также замену его *модельным* КЭ (в частности, *исключающим условием*), например, когда априорная информация о реальном КЭ отсутствует. Переход к *модельным* КЭ целесообразен и в том случае, когда необходимо оценить степень влияния на эволюцию СУ того или иного КЭ с учетом фактора *вязкости-теплопроводности* (ВТ). Выявлены допустимые границы (значений коэффициентов) в задании КЭ за СУ с помощью *изобарической дифференциальной связи*. Предполагается, что течение за СУ сверхзвуковое.

3. Разработаны, включая алгоритмизацию и программирование, оригинальные эффективные методы численного интегрирования получаемой из ОДСС нелинейной системы ОДУ, имеющей специфические свойства. По причине отсутствия старших (вторых) производных в первом из уравнений данной системы – *законе сохранения массы*, она, без дополнительных математических ухищрений, не может быть приведена к нормальной форме, которая к тому же лишена смысла при $Re_\infty \rightarrow \infty$: следовательно, для численного интегрирования уравнений системы нельзя воспользоваться стандартными методами. В связи с этим разработаны эффективные итерационные (на эволюционном шаге) методы интегрирования указанной системы, не требующие ее нормализации: первый метод основан на использовании *невязкого нулевого приближения*, которое находится аналитически, второй представляет собой модификацию численного *метода Ньютона в приращениях* без обращения матрицы Якоби. Существенно, что в процессе интегрирования такой системы удастся обходиться без поточечной постановки обобщенных или обычных *условий на косом СУ*: эти условия с высокой точностью будут выполняться уже автоматически (!). Постановка этих условий требуется только в начальной точке СУ, откуда начинается его эволюция.

4. Предложена последовательная *двухэтапная схема* математического моделирования двумерных стационарных *ударных течений* вязкого теплопроводного газа при больших числах Рейнольдса на основе асимптотических ОДСС. На *первом (аналитическом) этапе* одновременно под конкретную задачу (класс задач) средствами компьютерной алгебры генерируются ОДСС и следующая из них

система дифференциально-разностных *рабочих уравнений* (РУ) (система ОДУ), фиксирующая: конкретный вид *дифференциальной связи*, учет (неучет) отдельных вторичных вязких членов, порядки асимптотических разложений и разностных аппроксимаций старших производных за СУ, газодинамические и другие константы, и т.п. На *втором (расчетном) этапе* на основе сгенерированных РУ проводятся все необходимые расчеты. Далее следует обычный этап обработки и графического представления результатов моделирования. Оформление процедуры *машинного вывода уравнений* как отдельного (*первого*) этапа математического моделирования вызвано значительной сложностью и громоздкостью ОДСС, конечных выражений для левых-правых частей системы РУ и якобиана к ней, которые затем компилируются в FORTRAN-среде, где и проводятся все основные расчеты. Допускается также возврат к *первому этапу* с целью модификации (коррекции) РУ.

5. Предложена эффективная *стационарная дискретно-аналитическая модель* взаимодействия СУ со сдвиговым слоем, обобщающая «невязкую» *вихревую модель*, в которой число Рейнольдса фигурирует лишь как внешний параметр, определяющий поперечные масштаб и компоненту скорости невозмущенного сдвигового течения. В новой модели на основе асимптотических ОДСС, наряду с таким входением, фактор ВТ присутствует явно в интегрируемых дифференциальных уравнениях, и поэтому частично, а в ряде случаев значительно, определяет возмущенное сверхзвуковое течение. Аналитические свойства *дискретно-аналитической модели* позволяют сложное действие фактора ВТ расщепить и исследовать раздельно, выделяя его действие, например, только на ударном переходе. Это же свойство позволяет легко практически осуществлять предельный переход по числу Рейнольдса в «невязкий случай» при фиксированной начальной интенсивности СУ. Выявлена степень влияния на получаемое решение отдельных параметров *дискретно-аналитической модели*, таких как порядок асимптотических разложений, порядок аппроксимации разностных представлений и т.п.

6. Получено аналитическое (в расширенном смысле) решение стационарной задачи о проникновении СУ в сдвиговый слой. С учетом допущений исходная начально-краевая задача для *уравнений Навье-Стокса вязкого теплопроводного газа* (УНСВТ) сведена к задаче Коши для сложной нелинейной системы ОДУ (РУ), выполняющихся вдоль СУ.

7. Проведено математическое моделирование проникновения СУ в сдвиговый слой с применением *вязких и невязких моделей* разной сложности. Показано, что неучет фактора ВТ в явном виде в *дифференциальных соотношениях* на СУ (ОДСС) при расчете возмущенного течения в слое может привести к неверному конечному результату. В частности, показана неадекватность *вихревой модели взаимодействия* на основе полностью невязких *дифференциальных соотношений* на СУ в случае высокоградиентного, имеющего вязкую предысторию, течения перед ним.

Произведено сравнение одного из полученных стационарных аналитических решений задачи проникновения СУ в сдвиговый слой с соответствующим разностным решением полных нестационарных УНСВТ. Показано, что при одном и том же числе Рейнольдса разностное решение дает большую диссипацию СУ, чем стационарное решение на основе *дискретно-аналитической модели*, у которой такие негативные явления, как *схемная вязкость* и *дистракция СУ*, принципиально отсутствуют.

Выявлено как раздельное, так и совместное влияние таких физических факторов, как *неравномерность* невозмущенного течения перед СУ, *краевой эффект* за ним, *вязкость-теплопроводность*, на исследуемый *ударный газодинамический процесс*. Показано, что вне зависимости от знака КЭ (ослабление или поджатие СУ) действие фактора ВТ приводит к уменьшению интенсивности криволинейного скачка в неравномерном потоке. В случае, когда имеет место ослабляющий СУ КЭ, суммарное, направленное на ослабление скачка, действие обоих факторов оказывается значительнее.

С практической точки зрения важно, что разработанная стационарная *дискретно-аналитическая модель* позволяет в рамках единого вычислительного алгоритма проходить «насквозь» от *газодинамической до диффузионной* стадии эволюции СУ в слое, чем достигается значительная экономия вычислительного ресурса: счет на ПЭВМ вместо многих часов (УНСВТ) занимает минуты или даже секунды. Важно также, что в данной постановке задачи сохраняется естественный (бесконечный, в отсутствие других возмущений и, тем более, при учете фактора ВТ) порядок гладкости решения в касательном к СУ направлении, что и явилось основным мотивом для применения *аналитического подхода*.

8. Разработан высокоточный метод расчета сложных двумерных (плоских и осесимметричных) стационарных сверхзвуковых га-

зодинамических течений, содержащих множество дискретных особенностей (*разрывов*). Оригинальная конструкция несогласованной с *выделяемыми поверхностями* (ВП) разрывов разностной сетки делает *метод выделения разрывов* (МВР) более мобильным, позволяя вести выделение сотен взаимодействующих между собой и с границами расчетной области разрывов с автоматическим переходом на *сквозной счёт* отдельных из них, в зависимости от изначально выбранных критериев качества (разрешающей способности МВР). В процессе счета допускается появление новых и исчезновение вырожденных, утративших свою силу, особенностей. ВП могут являться фактические разрывы (*сильные и слабые*) всех существующих типов и направлений, а также *фиктивные разрывы* (характеристики) соответствующих семейств. Интегрирование газодинамических уравнений (*уравнений Эйлера*) в окрестности ВП СУ может осуществляться как с применением *сеточно-характеристического метода*, так и на основе невязкого варианта полученных в настоящей работе ОДСС, которые являются точными в этом случае. При этом интегрирование тех же уравнений в непрерывной части решения может вестись, либо с применением аппарата явных трехточечных разностных схем, либо *сеточно-характеристическим методом*. Предложен оригинальный эффективный фильтр ВП разрывов на основе решения локальной «задачи о взаимодействии двух произвольных плоских однородных сверхзвуковых потоков», позволяющий ограничивать разрешающую способность (детализацию) вычислительного алгоритма МВР при образовании «сгустков» из ВП, замедляющих расчет.

9. Проведено масштабное вычислительное моделирование плоских и осесимметричных струйных и канальных газодинамических течений с множеством разрывов. Показаны высокая разрешающая способность, быстрая сходимость и эффективность данного МВР, а также качественное и количественное отличия численных решений, полученных на одних и тех же расчетных сетках, данным МВР и *методом сквозного счета*.

10. Разработаны объемные комплексы вычислительных программ в средах (на языках) «REDUCE (LISP)» (аналитические выкладки), «FORTRAN» (собственно расчеты), «MathCAD» (обработка результатов расчета), реализующие на практике *дискретно-аналитический подход*.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Монография

1. Адрианов, А.Л. Интерференция стационарных газодинамических разрывов / А.Л. Адрианов, А.Л. Старых, В.Н. Усков. – Новосибирск: ВО «Наука». Сибирская издательская фирма, 1995. – 180 с.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК:

2. Адрианов, А.Л. Численное исследование взаимодействия сверхзвуковой струи газа с плоской преградой / А.Л. Адрианов, А.А. Безруков, Ю.А. Гапоненко // ПМТФ. – 2000. – Т. 41, № 4. – С. 106-111.
3. Адрианов, А.Л. О модельной кривизне скачка уплотнения в неравномерном потоке / А.Л. Адрианов // Вычислительные технологии. – 2000. – Т. 5, № 6. – С. 3–14.
4. Адрианов, А.Л. Асимптотическая модель взаимодействия скачка со сдвиговым слоем / А.Л. Адрианов // Вестник Сибирского гос. аэрокосм. ун-та им. акад. М.Ф. Решетнева: Сб. научн. тр. / Под ред. проф. Г.П. Белякова; СибГАУ. Вып. 3. – Красноярск, 2002. – С. 22–34.
5. Адрианов, А.Л. Дифференциальная модель проникновения скачка в сдвиговый слой / А.Л. Адрианов // Вестник 2004'5/2 Красноярского государственного университета. Физико-математ. науки / КрасГУ. – Красноярск, 2004. – С. 22–39.
6. Адрианов, А.Л. Аналитический подход в задаче проникновения скачка в сдвиговый слой / А.Л. Адрианов // Вестник Сибирского гос. аэрокосм. ун-та им. акад. М.Ф. Решетнева / под ред. проф. Г.П. Белякова; СибГАУ. Вып. 5. – Красноярск, 2004. – С. 5–22.
7. Адрианов, А.Л. Выделение разрывов в двумерных течениях невязкого и вязкого теплопроводного газа / А.Л. Адрианов // Вестник Сибирского гос. аэрокосм. ун-та им. акад. М.Ф. Решетнева / под ред. проф. Г.П. Белякова; СибГАУ. Вып. 7. – Красноярск, 2005. – С. 11–17.
8. Адрианов, А.Л. Обобщенные дифференциальные соотношения на скачке уплотнения / А.Л. Адрианов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. – 2009. Вып. 4. – С. 22–30.
9. Адрианов, А.Л. Математическое моделирование ударных течений вязкого теплопроводного газа на основе асимптотической модели

- / А.Л. Адрианов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. – 2010. Вып. 4. – С. 10–26.
10. Адрианов, А.Л. О взаимовлиянии краевого эффекта и фактора вязкости-теплопроводности в задаче проникновения скачка уплотнения в сдвиговой слой / А.Л. Адрианов // Труды XII международного семинара «Супервычисления и математическое моделирование» / Под ред. Р.М. Шагалиева. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2011. – 418 с., С. 9–17.
 11. Адрианов, А.Л. О допустимых границах в задании краевого эффекта за скачком уплотнения / А.Л. Адрианов // Вестник Сибирского гос. аэрокосм. ун-та им. акад. М.Ф. Решетнева. – Красноярск, 2012. Вып. 5(45). – С. 6–12.
- Публикации в прочих изданиях:**
12. Адрианов, А.Л. Выделение множества разрывов на несогласованной сетке в двумерных стационарных сверхзвуковых течениях / А.Л. Адрианов // Моделирование в механике. Сер. Струйные течения. – Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР. – 1988. – Т.2(19), № 6. – С. 3–9.
 13. Адрианов, А.Л. Некоторые особенности численного моделирования разрывных газодинамических течений на комбинированной нерегулярной сетке / А.Л. Адрианов // Моделирование в механике. – Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР. – 1990. – Т.4(21), № 5. – С. 3–14.
 14. Adrianov, A.L. Numerical simulation of 2-D stationary supersonic jets and internal flows with many discontinuities / A.L. Adrianov // Modeling, Measur. & Control, B, AMSE Press. – 1992. – Vol.46, № 4. – P. 19–26.
 15. Адрианов, А.Л. Дифференциальные соотношения на скачке уплотнения в вязком газе при больших числах Рейнольдса / А.Л. Адрианов // Тр. семинара “Матем. моделирование в механ.” ВЦК СО РАН. – Красноярск, 1996. – 18 с. – Деп. в ВИНТИ 01.04.96, №1052, В–96.
 16. Адрианов, А.Л. Другой подход к математическому моделированию течений вязкого теплопроводного газа с ударными волнами / А.Л. Адрианов // Наука и технологии. Том 1. Труды XXVI Российской школы. – М.: РАН, 2006. – 295 с., С. 108–122.